TD : Machines à registres

Olivier Raynaud (raynaud@isima.fr)

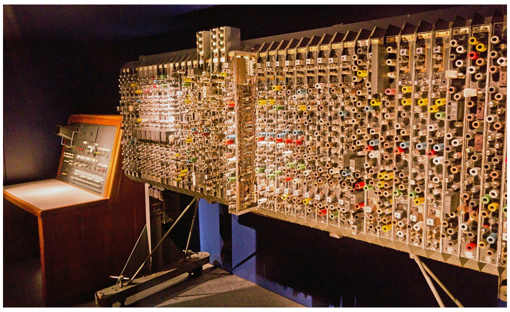

FIGURE 1 – Le prototype du calculateur électronique universel programme enregistré, l'Automatic Computing Engine (Ace). Cette machine, mise en service en 1950, était l'ordinateur le plus rapide de l'époque. [Image Extraite de https ://en.wikipedia.org/wiki/$Automatic_Computing_Engine$.

Rappels : La mémoire d'une machine à registres R est composées d'un ensemble potentiellement infini de registres notés $R_1, ..., R_n$. A l'aide des deux opérations d'incrémentation et de décrémentation de registres, les machines à registres calculent des fonction de $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$. Par convention le paramètre d'entrée, prenant la forme d'un vecteur $(x_1, ..., x_k)$ est stocké, avant l'exécution, dans les registres $R_1, ..., R_k$. Par convention toujours, le résultat obtenu par la machine M (noté $M(x_1, ...x_k)$), appliquée à l'ensemble des variables $\{x_1, ...x_k\}$, est contenu, à l'issu de l'exécution du programme, dans le registre R_1.

Un programme dans le langage des machines à registres se présente donc sous la forme d'un graphe $G_M = (S, A)$. L'ensemble S ne contient que 2 types de sommet (cf. figure 2) : un sommet indiquant le début du programme et un sommet sa fin, les sommets d'incrémentation de registres de degré sortant 1 et les sommets de décrémentation de registres de degré sortant 2.

Définition 1 ([1])**.** *Une fonction $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ est dite calculable par une machine à registres, s'il existe une machine M telle que $\forall$ $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k$, nous avons $f(x_1, ...x_k) = M(x_1, ...x_k)$.*

La question à laquelle nous répondrons dans ce Td est : Quel est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ que l'on peut calculer avec les machines à registres.

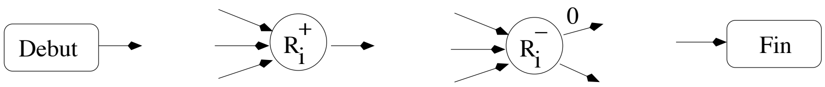

FIGURE 2 – Un arc sortant indique la suite du programme à exécuter. L'arc sortant, labellé 0, de l'opération de décrément indique la suite du programme lorsque le contenu du registre R_i est nul (avant décrémentation).

Exercice 1 (Manipulation du langage)**.**

Question 1. *Programmer une machine qui calcul la fonction $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ qui retourne 1* ***si et seulement si*** *n est pair.*

Question 2. *Montrer que les fonctions $\lambda_{xy}[x + y]$, $\lambda_{xy}[x - y]$, $\lambda_{xy}[x * y]$ sont calculables par des machines à registres.*

Question 3. *Construire une machine à registres qui reçoit dans les registres R_1 et R_2 deux entiers a et b et retourne dans R_1 la partie entière de la division de a par b et dans R_2 le reste de cette division. Si b est nulle on retournera par convention le couple $(0, 0)$.*

Question 4. *Programmer une machine dont le rôle est de remettre à zéro un registre R_n donné. On note $\mathcal{Z}_n$ un tel programme.*

Question 5. *Soient un registre R_n et F une famille de registres $\{R_{m_1}, ..., R_{m_r}\}$ et un registre R_p. Programmer un machine qui copie le contenu du registre R_n dans chacun des registres de F au moyen du registre R_p. On notera cette machine $\mathcal{C}^p_{n \to m_1,...,m_r}$.*

Théorème 1. *Toute fonction μ-récursive est calculable par une machine à registres.*

Exercice 2 (Machines à registres et calculabilité)**.**

Question 1. *Montrer que les fonctions $\lambda_x[O]$ et $\lambda_x[x + 1]$ et que les fonctions de projection définies par $\forall k \geq 1$ et $\forall i \in [1, k]$ $\pi_i^{(k)} = \lambda_{x_1...x_k}[x_i]$ sont calculables par des machines à registres.*

Lemme 1 (Opérateur de composition)**.**
Si *la fonction $\lambda_{y_1...y_m}[h(y_1, ..., y_m)]$ et* **si** *les m fonctions $\lambda_{x_1...x_k}[g_1(x_1, ..., x_k)], ..., \lambda_{x_1...x_k}[g_m(x_1, ..., x_k)]$ sont calculables par des machines à registres*
alors *la fonction composée $\lambda_{x_1...x_k}[h(g_1(x_1, ..., x_k), ..., g_m(x_1, ..., x_k))]$ est calculable par une machine à registre.*

Question 2. *Montrer le Lemme 1*

Lemme 2 (Opérateur de récursion).
Si *les fonctions* $\lambda_{x_1...x_k}[g(x_1,...,x_k)]$ *et* $\lambda_{yzx_1...x_k}[h(y,z,x_1,...,x_k)]$ *sont calculables par des machines à registres*
alors *la fonction* f *définie par*

$$f(0,x_1,...,x_k) = g(x_1,...x_k)$$
$$f(y+1,x_1,...,x_k) = h(y,f(y,x_1,...,x_k),x_1,...,x_k)$$

est calculable par une machine à registre.

Question 3. *Montrer le Lemme 2*

Définition 2 (Opérateur de minimisation).
Soit f *une fonction de* $\mathbb{N}^{k+1}$ *dans* $\mathbb{N}$, *on définit la fonction* $\lambda_{x_1...x_k}[\mu y(f(y,x_1,...,x_k)=0)]$.
Cette fonction retourne la valeur du plus petit entier y *(s'il existe) tel que :*

$$\forall z \leq y \ , f(z,x_1,...,x_k) \text{ est défini } \textbf{et } f(y,x_1,...,x_k)=0.$$

La fonction diverge si un tel y *n'existe pas.*

Lemme 3 (Opérateur de minimisation).
Si $f(y,x_1,...,x_k)$ *est une fonction calculable par une machine à registres,*
alors *la fonction* $\lambda_{x_1...x_k}[\mu y(f(y,x_1,...,x_k)=0)]$ *est calculable par une machine à registres.*

Question 4. *Montrer le Lemme 3*

Références

[1] J.F. Rey. *Calculabilité, Complexité et Approximation.* Vuibert, 2004.